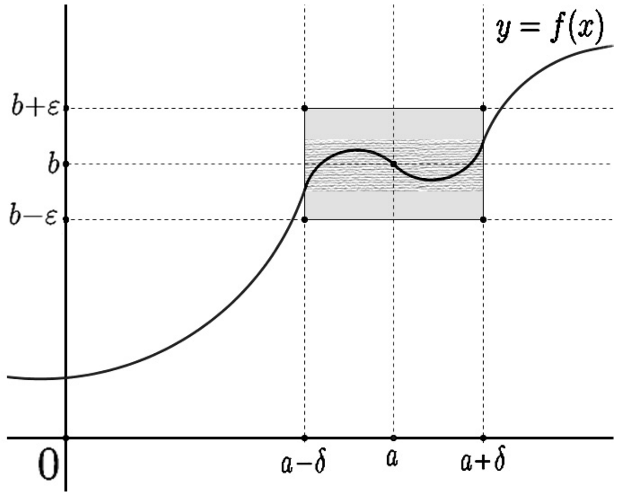


Определение: Если каждому значению переменной $x \in \{\mathbf{x}\}$ ставится в соответствие по известному закону f некоторое (единственное) число $y \in \{\mathbf{y}\}$, то говорят, что *на множестве* $\{\boldsymbol{x}\}$ *задана функция* $y = f(x)$. В этом случае множество $\{\mathbf{x}\}$ называется *областью определения*, а множество $\{\mathbf{y}\}$ - *областью значений* данной функции.

Определение: $f(x)$ - *ограничена на множестве* $\{\boldsymbol{x}\}$ $\Leftrightarrow \exists M > 0 : \forall x \in \{\mathbf{x}\}\ |f(x)| < M$ (ограничена сверху и снизу).

Определение: $M^* = \sup\limits_{\{\mathbf{x}\}} f(x) \Leftrightarrow$ *1)* $\forall x \in \{\mathbf{x}\}\ f(x) \leqslant M^*$; *2)* $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in \{\mathbf{x}\} : f(x') > M^* - \varepsilon$.

$$M_* = \inf_{\{\mathbf{x}\}} f(x) \ \Leftrightarrow\ \textit{1)}\ \forall x \in \{\mathbf{x}\}\ f(x) \geqslant M_*; \quad \textit{2)}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x'' \in \{\mathbf{x}\} : f(x'') < M_* + \varepsilon.$$

Определение: $f(x)$ - *монотонно возрастает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{x}\} : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2)$;
$f(x)$ - *монотонно неубывает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{x}\} : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
$f(x)$ - *монотонно убывает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{x}\} : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2)$;
$f(x)$ - *монотонно невозрастает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{x}\} : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geqslant f(x_2)$

Определение (Коши):

$$b = \lim_{x \to a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \{\mathbf{x}\}\ \ 0 < |x - a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Определение (Гейне):

$$b = \lim_{x \to a} f(x) \iff \forall \{x_n\},\ x_n \in \{\mathbf{x}\},\ x_n \neq a,\ \ x_n \to a\ \ f(x_n) \to b.$$

Утверждение: (Коши) $b = \lim\limits_{x \to a} f(x) \iff$ (Гейне) $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Определение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \ \Leftrightarrow\ \forall E > 0\ \exists \delta(E) :\ \forall x \in \{\mathbf{x}\}\ \ 0 < |x - a| < \delta\ \Rightarrow\ f(x) > E.$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)\ :\ \forall x \in \{\mathbf{x}\}\ \ |x| > \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$$\nexists \lim_{x \to a} f(x) = b \ \Leftrightarrow\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \{\mathbf{x}\}\ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| \geqslant \varepsilon.$$

Определение: Интервал, содержащий точку $x \in \mathbb{R}$, называется *окрестностью* этой точки.

Определение: Точка a называется *предельной точкой множества* $\{\boldsymbol{x}\}$, если для $\forall \delta > 0$ в каждой её окрестности $\mathbf{U}_\delta(a) = (a - \delta,\ a + \delta)$ содержатся отличные от a значения $x \in \{\mathbf{x}\}$.

Определение: Точка множества, не являющаяся предельной, называется *изолированной точкой множества.*

9.1.

(а) • Докажите, что x_0 является предельной точкой множества $\{\mathbf{x}\} \subset \mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условиям:

1. $\forall n \geqslant 1$, таких, что $x_n \in \{\mathbf{x}\}$, выполнено $x_n \neq x_0$;

2. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$.

(б) Докажите, что в любой окрестности предельной точки x_0 множества $\{\mathbf{x}\}$ находится не менее, чем счётное число точек множества, отличных от x_0.

9.2. Определите множество A всех предельных точек множества $\{\mathbf{x}\}$, если:

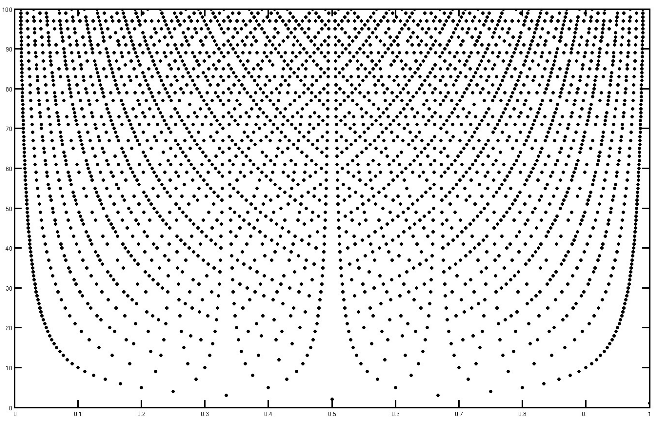
(а) $\{\mathbf{x}\} = \left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$; *(б)* $\{\mathbf{x}\} = [0;1] \cap \mathbb{Q}$;

(в) • $\{\mathbf{x}\} = \left\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}]\,, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$, где $[\sqrt{n}]$ – целая часть числа $\sqrt{n}$.

9.3. • *(модифицированная функция Римана)* Покажите, что функция определяемая условиями:

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{если} \quad x = \dfrac{m}{n},\ \text{НОД}(m,n) = 1,\ m,n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если} \quad x \text{ - иррационально;} \end{cases}$$

конечна, но не ограничена в любой окрестности любой положительной точки x.



9.4. *(382)* Пусть функция $f(x)$ определена и *локально ограничена* в каждой точке множества A, (т.е. $\forall c \in A\ \ \exists E > 0,\ \exists \delta > 0 : |f(x)| \leqslant E$ при $\forall x \in \mathbf{U}_\delta(c)$). Является ли эта функция ограниченной на этом множестве, если:

(а) A - интервал $(0,1)$; *(б)* A - сегмент $[0,1]$.

9.5. *(385)* Пусть $\varepsilon-$ произвольное положительное число. Исследуйте на ограниченность функцию

$$f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$$

в интервале $(0,\varepsilon)$.

9.6. • Найдите на множестве $\{\mathbf{x}\} = (0;+\infty)$ точную нижнюю и верхнюю грани функции

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

9.7. *(387)* Функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает на сегменте $[a,b]$. Чему равны ее нижняя и верхняя грани на этом сегменте?

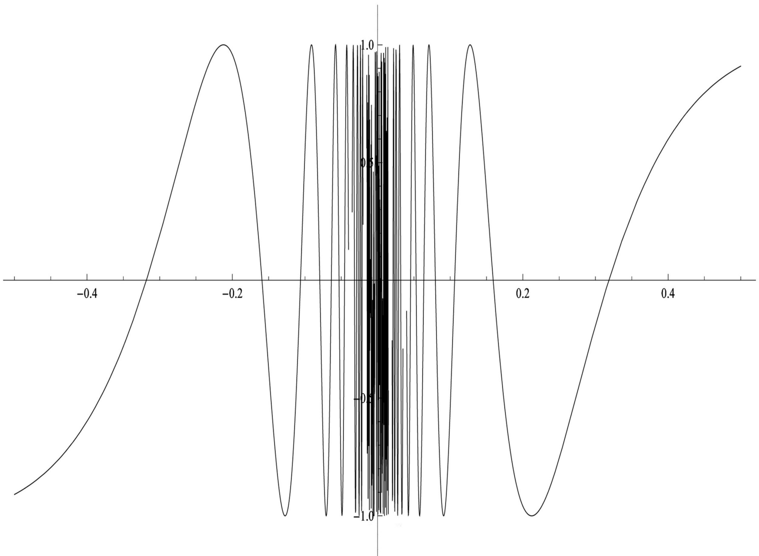
9.8. Исходя из определения предела покажите, что:

(а) • $\lim\limits_{x\to -3} x^2 = 9$; *(б)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\cdot\sin x}{x^2-100x+3000} = 0$;

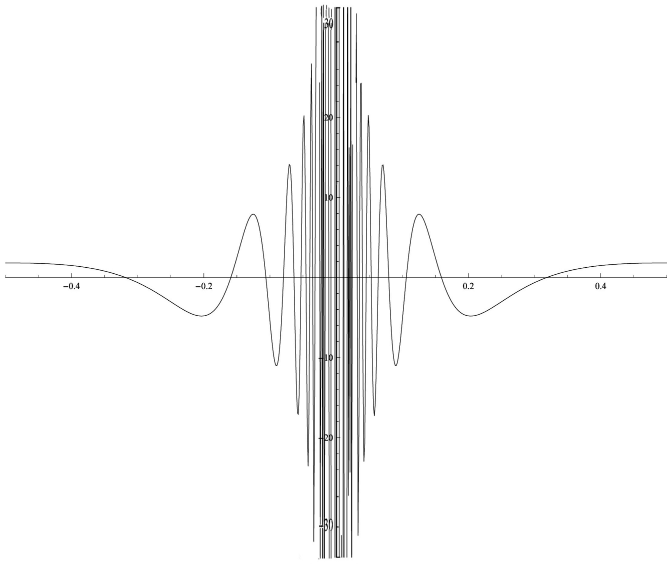
(в) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-4x} = 2$; *(г)* • $\nexists\ \lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$.

Замечание: В отсутствии предела легче всего убедиться, стоя на “точке зрения последовательностей”, т.е. используя определение предела по Гейне.

Замечание: Пользуясь определением предела мы лишь проверяем, является ли данное число пределом рассматриваемой функции или нет, но не имеем конструктивного метода вычисления предела данной функции.



$\sin\dfrac{1}{x}$



$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

9.9. Постройте пример функции, которая не ограничена в любой δ-окрестности точки 0, но не является бесконечно большой при $x\to 0$

9.10. Докажите, что из $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = p$ следует, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = p$. Будет ли верно обратное утверждение?

9.11. *(424, 408, 409)*

Найдите пределы следующих рациональных функций:

(а) • $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}, \quad n\in\mathbb{N}$;

(б) $\lim\limits_{x\to +\infty} |P(x)|, \quad P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, где $a_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,n},\ a_0\neq 0$;

(в) $\lim\limits_{x\to +\infty} |R(x)|, \quad R(x) = \dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$, где $a_0\neq 0,\ b_0\neq 0$

9.12. *(411, 413, 420, 421, 435)*

Найдите следующие пределы:

(а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(б) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$;

(г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$;

(д) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$;

(е) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$;

(ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$;

(з) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Пусть далее $[a]$ - ближайшее к а целое число, не превосходящее его.

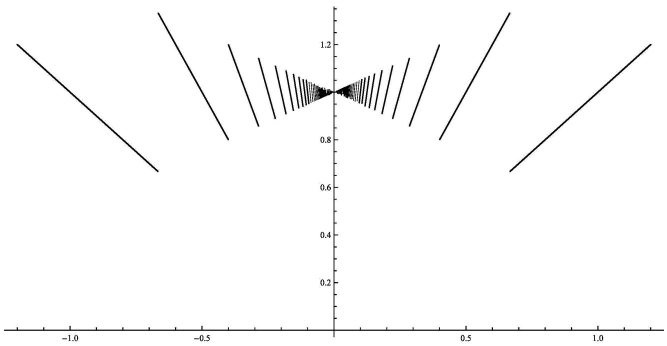
9.13. Найдите (если они существуют) следующие пределы:

(а) $\bullet \lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;

(б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right]$, $a>0, b>0$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[x]}{x}$;

(г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\left(\left[\dfrac{1}{x^2}\right]+\left[\dfrac{2}{x^2}\right]+\ldots+\left[\dfrac{k}{x^2}\right]\right)\right)$, $\quad k\in\mathbb{N}$.



9.14. $\star$ Функцию $f\,:\,\mathbb{Q}\mapsto\mathbb{R}$, определяемую соотношением

$$\mathbb{Q}\ni r\;\mapsto\; f(r)\;=\;r,$$

продолжить на $\mathbb{R}$ так, чтобы

(а) существовал $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

(б) существовал только один из односторонних пределов $f(0-0)$, $f(0+0)$.

9.15. $\star$ Предположим, что $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\left[\frac{1}{x}\right]^{-1}\right)=0$. Существует ли предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

9.16. Пусть функция $f(x)$ определена на всём отрезке $[0,\,1]$ и отображает его на некоторое подмножество $[0,\,1]$. Верно ли, что найдётся такое $x\in[0,\,1]$, что $f(x)=x$, если данная функция

(а) монотонно возрастает?

(б) монотонно убывает?

9.17. $\star$ Будем говорить, что: функция возрастает на интервале, если для любых точек x_1 и x_2 из данного интервала, из неравенства $x_1<x_2$, следует $f(x_1)<f(x_2)$; функция возрастает в точке, если существует некоторая окрестность точки (т.е. интервал, содержащий эту точку), где функция возрастает; Докажите, что из возрастания в каждой точке интервала следует возрастание на интервале.

Вычисление пределов функций

<u>**Определение:**</u> $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\;\; \exists\delta(\varepsilon) > 0: \;\; \forall x \in (x_0,\, x_0{+}\delta) \;\;\Rightarrow\; |f(x){-}a| < \varepsilon;$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\;\; \exists\delta(\varepsilon) > 0: \;\; \forall x \in (x_0{-}\delta,\, x_0) \;\;\Rightarrow\; |f(x){-}a| < \varepsilon;$$

<u>**Утверждение:**</u> Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = b$. Тогда имеем:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm \varphi(x)] = a \pm b; \quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot\varphi(x)] = a\cdot b; \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a}{b} \quad (\varphi(x) \neq 0,\; b \neq 0).$$

<u>**Теорема:**</u> *(о двух эвольвентах):*

Если для $\forall x \in \mathbf{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнено:

$$f_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant f_2(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = a, \quad \text{то} \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = a.$$

Замечательные пределы:

$$\textit{1)}\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \textit{2)}\; \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

10.1. Докажите, используя определение предела функции, следующие формулы:

(а) • $\lim\limits_{x\to 0-0} a^{1/x} = 0,\;\; a > 1.$

(б) $\lim\limits_{x\to 0+0} a^{1/x} = \infty,\;\; a > 1.$

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^m}{a^x} = 0$, где $a > 1,\; m \in \mathbb{N}$

(г) • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0.$

(д) $\lim\limits_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

10.2. *(444, 452, 463, 439, 453)*

Найдите следующие пределы:

(а) • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x},\;\; n \in \mathbb{N};$

(б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x},\;\; m, n \in \mathbb{N};$

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/3}\big[(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}\big];$

(г) $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}},\;\; a > 0;$

(д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x},\;\; m, n \in \mathbb{N}.$

10.3. *(478, 483, 489, 505, 509)*

Вычислите пределы:

(а) • $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$, $0\neq p\in\mathbb{R}$;

(б) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

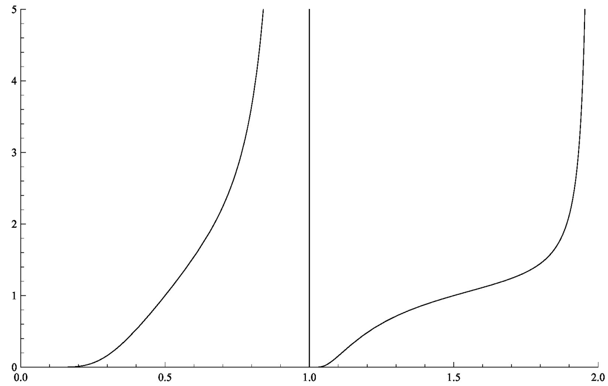
(в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$;

(г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$;

(д) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \dfrac{2\pi n}{3n+1}$;

10.4. Найдите пределы, используя выражение $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ или соответствующие оценки функций:

(а) $\lim\limits_{x\to\pi+0} \sqrt{1+\cos x}\cdot \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$;



(б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}$;

(в) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \mathrm{ctg}2x\cdot\mathrm{ctg}(\dfrac{\pi}{4}-x)$;

(г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x\sin 2x)}{x^2}$;

(д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cdot\cos^2 2x\cdot\cos^3 3x}{x^2}$;

(е) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{\mathrm{ctg}\,\pi x}$.

Непрерывность показательной, логарифмической и степенно-показательной функций:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}, \qquad a>0;$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0, \qquad x_0>0;$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ существуют.

10.5. • Пусть выполнено: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\Big(f(x)-1\Big)=A$. Докажите, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^A.$$

<u>**Замечание:**</u> приведённый выше метод бывает **исключительно** удобен при раскрытии неопределённостей вида 1^∞, т.к. он сводит задачу к раскрытию неопределённости вида $0\cdot\infty$, что уже заметно проще.

10.6. *(512, 514, 516, 519)*

Найдите пределы, используя метод из предыдущего номера:

(а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; *(б)* $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$;

(в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{x}$, $a_1>0,\ a_2>0$; *(г)* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$;

(д) $\lim\limits_{x\to0}\big(\mathrm{ch}x\big)^{\frac{1}{1-\cos x}}$, где $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ – *гиперболический косинус.*

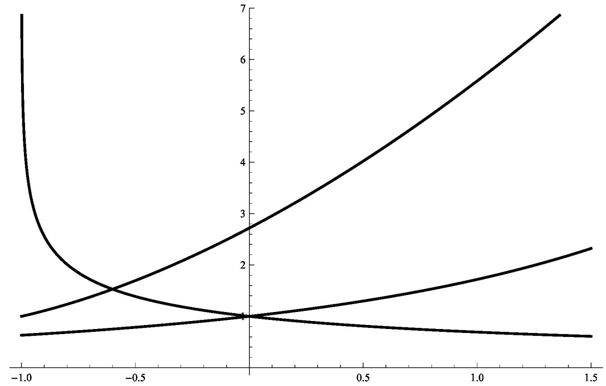
10.7. ***(замечательные пределы)***

Докажите следующие формулы:

(а) • $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$, $0<a\neq1$;

(б) • $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, $0<a\neq1$;

(в) • $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$, $0<a\neq1$.



Чертежи данных функций при $a=e$

10.8. *(543,553,556,558)*

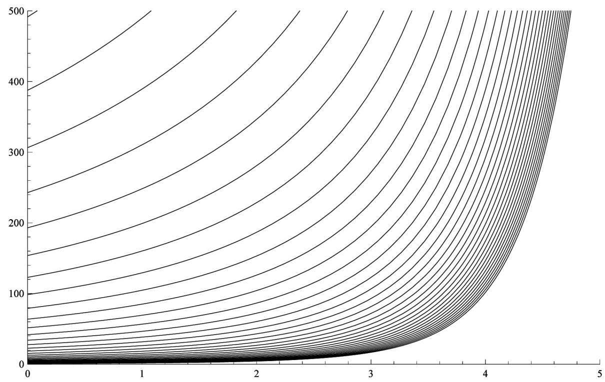
Найдите пределы, используя формулы из **№10.7**:

(а) • $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$, $0<a\neq1$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\big(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\big)$, $x>0$;

(в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$, $a>0,\ b>0,\ c>0$;

(г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{1/x}$, $a>0,\ b>0$.



$f(x)=\frac{x^x-a^a}{x-a}$ *для различных значений a*

10.9. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - функция, периодическая с периодом $T>0$ и отличная от постоянной. Докажите, что $f(x)$ не может иметь предела при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

10.10. $\star$ Существует ли предел $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, функции $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, если

(а) $\forall a\geqslant0\ \Rightarrow\ f(a+n)\to0,$ при $n\to\infty$;

(б) $\forall a>0\ \Rightarrow\ f(an)\to0,$ при $n\to\infty$;

10.11. $\star$ Пусть функция $f(x)$ определена на луче $x \in (x_0;\, +\infty)$, ограничена в каждом интервале $(x_0;\, x_1)$ и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}, \quad n=0,1,2,\ldots.$$

Докажите, или опровергните контрпримером следующее тождество:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}} \;=\; \frac{1}{n+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}.$$

10.12. $\star$ Пусть функция $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ такова, что

$$\forall a\in\mathbb{R}\ \text{ выполнено }\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{a}{n}\right) \;=\; 0.$$

Существует ли предел функции $f(x)$ в точке 0 ?

10.13. $\star$ Предположим, что для функции $f(x)$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\right) \;=\; 0.$$

Найдите предел: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если он существует.

10.14. $\star$ Пусть $\mathbf{A}(x)$– квадратная функциональная матрица порядка $2n+1$, определённая на интервале $(0;1)$. Известно, что $\det A(x)=1$ для всех x. И для любой постоянной матрицы $\mathbf{B}$ существует предел $\lim\limits_{x\to0+0}\mathbf{A}(x)\,\mathbf{B}\,\mathbf{A}^{-1}(x)$. Докажите, что существуют пределы

$$\lim_{x\to0+0}\mathbf{A}(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to0+0}\mathbf{A}^{-1}(x).$$

10.15. $\star$ Предположим, что

$$\lim_{x\to0} f(x)=0; \qquad \lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0.$$

Докажите, что $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Асимптотическое сравнение функций. О-символика

Когда возникает вопрос об описании поведения функции вблизи некоторой точки (или бесконечности), в которой, как правило, сама функция не определена, говорят, что интересуются *асимптотикой* или *асимптотическим поведением* функции в окрестности этой точки.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуют с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Определение: Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ существует некоторая проколотая окрестность $\mathbf{U}'(x_0)$ и постоянная $C > 0$, что $\forall x \in \mathbf{U}'(x_0)$ выполняется неравенство: $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$, *то функция f называется* ограниченной по сравнению с функцией g *на* $\mathbf{U}'(x_0)$ и пишется $f(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big),\ \ x \to x_0$.

Замечание: Иногда удобно представлять функцию $f(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big),\quad x \to x_0$ в виде $f(x) = \varphi(x)g(x)$, где $\varphi(x)-$ ограничена при $x \to x_0$.

Определение: Если функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$ и $g(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)$ при $x \to x_0$, то они называются *функциями одного порядка* при $x \to x_0$. Обозначение: $f(x) \asymp g(x), x \to x_0$.

Определение: Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to x_0$, если в некоторой окрестности $\mathbf{U}'(x_0)$ определена такая функция $\varphi(x)$, что

$$f(x) = \varphi(x)g(x) \ \text{ и } \ \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{$*$}$$

Определение: Функции $f(x)$ и $g(x)$, эквивалентные при $x \to x_0$, называются также *асимптотически равными* при $x \to x_0$. Обозначение: $f(x) \sim g(x), x \to x_0$.

Замечание: Если в некоторой окрестности $\mathbf{U}'(x_0)$ справедливы неравенства $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, то условия $(*)$ тождественны соотношению $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ $\left(\text{или} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1\right)$.

Определение: Если в некоторой окрестности $\mathbf{U}'(x_0)$ выполнено: $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то функция $f(x)$ *называется бесконечно малой по сравнению с функцией* $g(x)$ при $x \to x_0$. Обозначение: $f(x) = \overline{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$, при $x \to x_0$.

Замечание: Если $g(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, то условие $f = \alpha g$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$ можно переписать в виде: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Замечание: Под символами $\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$ и $\underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)$ понимаются не *конкретные функции*, а *множества функций*, обладающих соответствующими свойствами.

11.1. Докажите следующие утверждения:

(а) если $f(x) = \overline{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$, то $f(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$;

(б) • если $f(x) = \varphi(x)g(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = k < \infty$, то $f(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$, $x \to x_0$;

Замечание: Это условие берется за определение множества $\mathrm{O}^*\big(g(x)\big)$, т.е $\mathrm{O}^*\big(g(x)\big) \subset \underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$;

(в) если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k < \infty,\ k \neq 0,\ g(x) \neq 0$, то $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$;

(г) для того, чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентными при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы при $x \to x_0$ выполнялось условие $f(x) = g(x) + \overline{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$, или $g(x) = f(x) + \overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$;

(д) пусть $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причём $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$;

(е) если $f_1(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(g_1(x)\big)$, $f_2(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(g_2(x)\big)$, $x \to x_0$, то $f_1(x)f_2(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to x_0$.

11.2. *(646)* Покажите, что при $x \to a$:

(а) • $\overline{\mathrm{o}}\Big(\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)\Big) = \overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$;

(б) • $\underline{\mathrm{O}}\Big(\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)\Big) = \overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$;

(в) $\overline{\mathrm{o}}\Big(\underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)\Big) = \overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$;

(г) $\underline{\mathrm{O}}\Big(\underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)\Big) = \underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)$;

(д) $\underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big) + \overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big) = \underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)$.

Замечание: Данные равенства нужно понимать, как теоретико-множественные включения. Например, для **(а)**, имеем, $\overline{\mathrm{o}}\Big(\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)\Big) \subset \overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$. Было бы правильней писать не $g = \overline{\mathrm{o}}\big(f\big)$, а $g \in \overline{\mathrm{o}}\big(f\big)$. Однако это привело бы к существенному усложнению вычислений с формулами, содержащими символы $\overline{\mathrm{o}}$ и $\underline{\mathrm{O}}$.

11.3. *(647)* Пусть $x \to 0$ и $n > 0$. Покажите, что:

(а) • $M \cdot \underline{\mathrm{O}}\big(x^n\big) = \underline{\mathrm{O}}\big(x^n\big)$, $\qquad M \neq 0-$ постоянная;

(б) • $\underline{\mathrm{O}}\big(x^n\big) + \underline{\mathrm{O}}\big(x^m\big) = \underline{\mathrm{O}}\big(x^n\big)$, $\qquad n < m$;

(в) $\underline{\mathrm{O}}\big(x^n\big) \cdot \underline{\mathrm{O}}\big(x^m\big) = \underline{\mathrm{O}}\big(x^{n+m}\big)$.

Замечание: При $x \to \infty$ все остаётся также, кроме пункта **(б)**, в котором уже выполняется:

$$\underline{\mathrm{O}}\big(x^n\big) + \underline{\mathrm{O}}\big(x^m\big) = \underline{\mathrm{O}}\big(x^m\big), \quad n < m,$$

т.к. при $x \geqslant 1$ имеем $|x^n| \leqslant |x^m|$.

11.4. Пусть $x \to a$. Докажите следующие утверждения:

(а) $\overline{\mathrm{o}}\big(f\big) + \overline{\mathrm{o}}\big(f\big) = \overline{\mathrm{o}}\big(f\big)$;

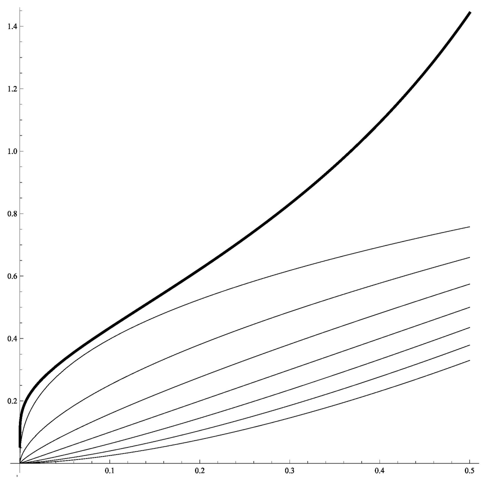
(б) $\overline{\mathrm{o}}\big(f\big) = \underline{\mathrm{O}}\big(f\big)$;

Замечание: Отметим, что обратное включение не выполняется. То есть $\underline{\mathrm{O}}\big(f\big) \neq \overline{\mathrm{o}}\big(f\big)$. Например, пусть $f(x) = 1$, тогда $\overline{\mathrm{o}}\big(1\big)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$. Однако, $\underline{\mathrm{O}}\big(1\big)$ ограниченная функция при $x \to a$.

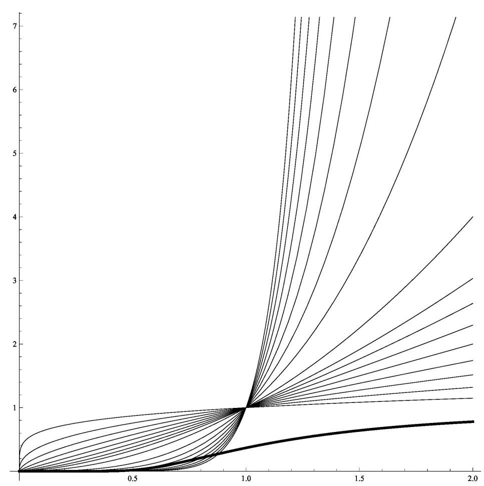
(в) $\underline{\mathrm{O}}\big(f\big) + \underline{\mathrm{O}}\big(f\big) = \underline{\mathrm{O}}\big(f\big)$;

11.5. *(654)* • Пусть $x \to 0{+}0$. Покажите, что бесконечно малые $f_1(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, $f_2(x) = e^{-1/x^2}$ не сравнимы с бесконечно малой x^k, каково бы ни было k, т.е. ни при каком k не может иметь место равенство:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f_i(x)}{x^k} = M - const, \;\; 0 < |M| < \infty, \; i = 1, 2.$$



$f(x) = -\dfrac{1}{\ln x}$



$f(x) = e^{-1/x^2}$

Метод выделения главной части функции.

Определение: Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $\mathbf{B}'(x_0)$. Если функция $\alpha(x)$ представима в виде $\alpha(x) = \beta(x) + \overline{\mathrm{o}}\big(\beta(x)\big)$, $x \to x_0$, то $\beta(x)$ называется главной частью функции $\alpha(x)$ при $x \to x_0$.

11.6. Докажите, что если функция $\alpha(x)$ обладает при $x \to x_0$ главной частью вида $A(x - x_0)^k$, $A \neq 0$, то среди всех главных частей такого вида она определяется *единственным образом.*

Замечание: Пример **11.5** показывает, что главной части относительно заданного набора (шкалы) функций может не существовать.

Эквивалентность при $x \to 0$	Равенство при $x = 0$
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + \overline{o}(x)$
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \overline{o}(x^2)$
$\mathrm{tg} x \sim x$	$\mathrm{tg} x = x + \overline{o}(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin x = x + \overline{o}(x)$
$\mathrm{arctg} x \sim x$	$\mathrm{arctg} x = x + \overline{o}(x)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x = 1 + x + \overline{o}(x)$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+x) = x + \overline{o}(x)$
$(1+x)^m - 1 \sim mx$	$(1+x)^m = 1 + mx + \overline{o}(x)$

11.7. *(653, 655, 658)*

(а) Пусть $x \to 0$.

Выделите главный член вида Cx^n, $(C = const,\ n$ — порядок малости относительно переменной $x)$ следующих функций:

$$\bullet\ f_1(x) = 2x - 3x^2 + x^5; \qquad f_2(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}; \qquad f_3(x) = \mathrm{tg}\, x - \sin x;$$

(б) Пусть $x \to 1 + 0$.

Выделите главный член вида $C(x-1)^n$ следующих функций:

$$\bullet\ f_1(x) = \ln x; \qquad f_2(x) = e^x - e; \qquad \bullet\ f_3(x) = x^x - 1;$$

$$f_4(x) = x^3 - 3x + 2; \qquad f_5(x) = 4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1;$$

(в) Пусть $x \to 1 + 0$.

Выделите главный член вида $C\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^n$ следующих функций:

$$f_1(x) = \frac{\ln x}{(x-1)^2}; \qquad f_2(x) = \frac{1}{\sin \pi x}; \qquad f_3(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}};$$

11.8. Подберите числа a, b и c так, чтобы выполнялись равенства:

(а) $\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - ax - b\right) = 0;$ *(б)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4 + 2x^3} - ax^2 - bx - c\right) = 0;$

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{5x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 4x} - ax^2 - bx - c\right) = 0.$

11.9. Предположим, что $f(x) = \overline{o}\big(g(x)\big)$, $g(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$. Докажите, что

$$e^{f(x)} = \overline{o}\big(e^{g(x)}\big), \quad x \to +\infty.$$

11.10. $\star$ Пусть для натурального n число x_n — корень уравнения $x = \mathrm{tg}\, x$ из интервала $\big(\pi n; \pi(n+1)\big)$. Докажите, что $\quad x_n = \pi n + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\pi n} + \underline{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right), \ n \to \infty.$

11.11. $\star$ Пусть функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что для любого интервала $(a; b) \subset \mathbb{R}$ найдётся точка $x_0 \in (a; b)$ и число l такие, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\quad f(x) \geqslant f(x_0) + l \cdot (x - x_0) + \overline{o}\big(x - x_0\big), \quad x \to x_0.$

Непрерывность функции. Точки разрыва

Определение: Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Обозначение: $f(x) \in \mathcal{C}(x_0)$.

Определение: ***(классификация точек разрыва)***

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *устранимый разрыв*, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *разрыв первого рода*, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *разрыв второго рода*, если $\nexists$ или равен ∞ хотя бы один из пределов: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

Определение: Если выполнено равенство: $f(x_0-0) = f(x_0)$ $\big($или $f(x_0+0) = f(x_0)\big)$, то говорят, что функция $f(x)$ непрерывна слева (справа) в точке x_0.

Определение: Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* ***{x}***, если она непрерывна в каждой точке этого множества, а в граничных точках непрерывна с одной стороны.

Теорема Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a;b]$, то:

(первая и вторая теоремы Вейерштрасса)

1. $\exists M > 0 :\ |f(x)| \leqslant M,$ для $\forall x \in [a;b]$; $\big(f(x)$ - ограничена на этом сегменте$\big)$.
2. $\exists x_m, X_m \in [a;b] :\ \ f(x_m) = \inf\limits_{[a;b]} f(x),\ \ f(X_m) = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$;

$\big(f(x)$ - достигает на нём свои точные нижнюю и верхнюю грани$\big)$.

(теорема Коши)

3. она принимает на каждом интервале $(\alpha;\beta) \subset [a;b]$ все свои промежуточные значения между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$. В частности, если $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то $\exists \gamma \in (\alpha;\beta)\ :\ f(\gamma) = 0$.

Замечание: Элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

12.1. Приведите пример функций, имеющих

(а) устранимый разрыв;

(б) разрыв первого рода;

(в) разрыв второго рода.

Укажите все точки, в которых данные функции имеют разрыв.

12.2. *(666)* • С помощью $''\varepsilon - \delta''$ - рассуждений докажите, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна при $x = 5$.

Замечание: Отметим, что при решении этой задачи, числовая функция $\delta(\varepsilon)$ может быть выбрана непрерывной. Это наталкивает нас на формулировку следующей задачи:

12.3. $\star$ Напишем определение того, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x \in \mathbf{U}'_\delta(x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{$*$}$$

Докажите, что в условии $(*)$ *всегда* можно так подобрать $\delta = \delta(\varepsilon)$, что функция $\delta(\varepsilon)$ будет непрерывной при $\varepsilon > 0$.

12.4. *(668)* Сформулируйте на языке $''\varepsilon - \delta''$ следующее утверждение: функция $f(x)$, определённая в точке x_0, не является непрерывной в этой точке.

12.5. *(669)* Пусть для некоторых чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots > 0$ можно найти соответствующие числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такие, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

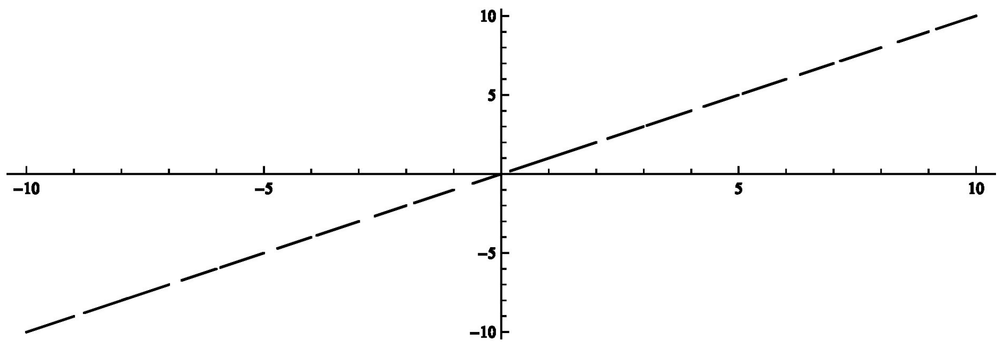
(а) числа ε образуют конечное множество;

(б) числа ε образуют бесконечное множество двоичных дробей $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

12.6. *(670)* $\bullet$ Пусть $f(x) = x + 0,001 \cdot [x]$. Докажите, что для

$$\varepsilon > 0,001 \;\; \exists\delta(\varepsilon; x) > 0 : \;\; |f(x') - f(x)| < \varepsilon, \;\; \text{если только} \;\; |x' - x| < \delta,$$

а для $0 < \varepsilon \leqslant 0,001$ для $\forall x$ этого сделать нельзя.



12.7. Выясните является ли непрерывной в точке x_0 функция $f(x)$, если

(а) $\bullet$ для $\forall\delta > 0 \;\; \exists\varepsilon(\delta, x_0) > 0 :$ если $|x - x_0| < \delta$, то выполнено $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

(б) для $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta(\varepsilon, x_0) > 0 :$ если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то выполнено $|x - x_0| < \delta$;

(в) для $\forall\delta > 0 \;\; \exists\varepsilon(\delta, x_0) > 0 :$ если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то выполнено $|x - x_0| < \delta$.

Если является, проведите доказательство. Если нет, постройте контрпример, и объясните *какое свойство функции описывается данными неравенствами?*

Далее под выражением $[\alpha]$ понимается целая часть числа α.

12.8. *(679, 680, 681, 682, 683, 686)*

Исследуйте на непрерывность следующие функции:

(а) $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ \textit{произвольно}, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

(б) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

(в) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & \text{если } x \neq 1, \\ \textit{произвольно}, & \text{если } x = 1; \end{cases}$

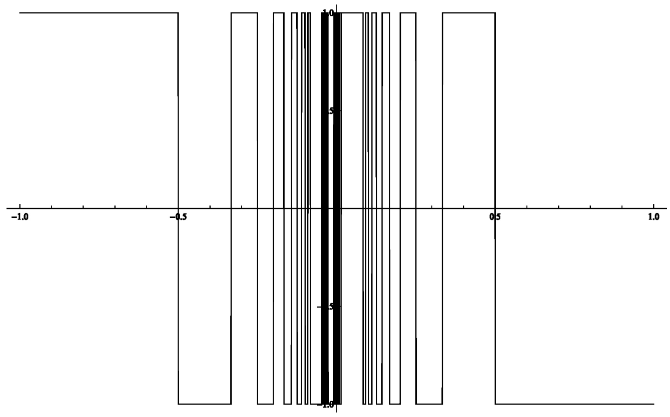
(г) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

(д) $f(x) = \begin{cases} x\ln x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ a, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

(е) $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$.

12.9. *(694, 707, 700)* Исследуйте на непрерывность и установите характер точек разрыва следующих функций:

(а) $y = \operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$;



(б) $\bullet$ $y = x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;

(в) $y = \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$;

(г) $y = [x]\sin\pi x$;

(д) $y = [x]\cdot\cos\left(\dfrac{\pi(2x+1)}{2}\right) + e^{x-1/x}$;

(е) $y = \dfrac{2\operatorname{sgn}(1-x)}{(\operatorname{sgn}(x+1))^2\,(x+1+(x-1)\operatorname{sgn} x)}$;

12.10. *(724, 726)* Исследуйте на непрерывность и установите характер точек разрыва следующих функций $y(x)$:

(а) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$;

(б) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$;

(в) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$;

(г) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$;

(д) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}, \quad x > -2$;

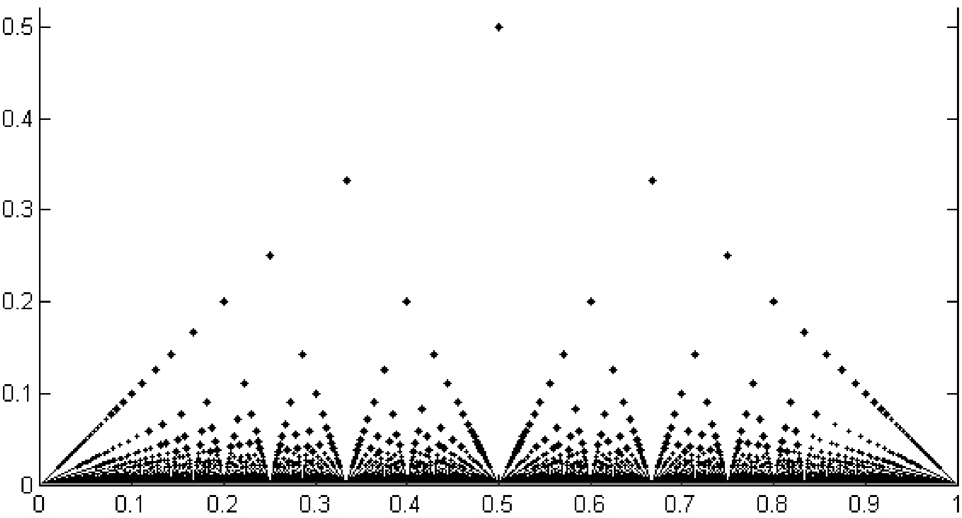
12.11. ***(функция Дирихле)***

$\bullet$ Исследуйте на непрерывность функцию $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

12.12. ***(функция Римана)***

• Исследуйте на непрерывность функцию

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если}\, x = \dfrac{m}{n},\ \text{НОД}(m,n) = 1,\ \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное число.} \end{cases}$$



Функция Римана на интервале (0; 1)

12.13. Постройте пример функции:

(а) • непрерывной только в одной точке;

(б) всюду немонотонной и всюду разрывной, имеющей однозначную обратную функцию;

(в) разрывной, имеющей непрерывную обратную функцию.

12.14. Исследуйте на непрерывность и установите характер точек разрыва следующих функций:

(а) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{tg} x, & \text{если } \ x \in \mathbb{Q}, \\ \sqrt{3}, & \text{если } \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ *(б)* $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } \ x \in \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

12.15. $\star$ Существует ли непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, принимающая рациональные значения в иррациональных точках и иррациональные значения в рациональных точках?

12.16. $\star$ Пусть у действительнозначной функции $f(x)$ в каждой точке x_0 существует конечный предел: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$. Верно ли, что функция $g(x)$ непрерывна?

12.17. $\star$ Пусть функция $f(x)$ непрерывна. Предположим, что для $\forall c > 0$ график функции f может быть совмещен с графиком функции $c \cdot f$, используя только сдвиг и поворот. Следует ли из этого, что функция $f(x)$ представляет из себя линейную?

12.18. Могут ли непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ быть различными

(а) только в конечном числе точек отрезка $[0; 1]$?

(б) только на счётном множестве точек отрезка $[0; 1]$?

13.1.

(а) • Докажите, что *функция Дирихле* (см. **№12.11**) представима в виде:

$$D(x) = \lim_{m\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x) \right\}.$$

(б) ⋆ Существует ли такая последовательность непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $D_n(x)$, что $D(x) = \lim\limits_{n\to\infty} D_n(x)$ при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}$?

13.2. • Пусть f - вещественная функция, определённая в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$.

(а) Докажите эквивалентность следующих свойств:

1. функция $f(x)$ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$;
2. для $\forall\, \mathbf{V}\big(f(a)\big)\ \exists\, \mathbf{U}(a) :\ f\big(\mathbf{U}(a)\big) \subset \mathbf{V}\big(f(a)\big)$, т.е. для любой окрестности $\mathbf{V}\big(f(a)\big)$ найдется такая окрестность точки a, $\mathbf{U}(a)$, образ которой при отображении f содержится в $\mathbf{V}\big(f(a)\big)$;

(б) Пусть X - область определения функции $f(x)$, $a-$ произвольная изолированная (т.е. не предельная точка множества X). Докажите, что $f(x)$ непрерывна в точке a.

Определение: Назовем множество $\mathbf{A}$ - *открытым*, если для $\forall x \in \mathbf{A}$ найдется некоторая окрестность этой точки $\mathbf{U}(x)$, целиком лежащая в $\mathbf{A}$.

Определение: Назовем множество $\mathbf{B}$ - *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Утверждение: Конечное или счётное объединение открытых множеств открыто.

Замечание: Пустое множество $\emptyset$ и всю действительную прямую $\mathbb{R}$ мы будем считать открытым и замкнутым одновременно.

13.3. Пусть $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}$, где $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}$. Докажите эквивалентность следующих свойств:

1. функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{X}$;

2. множество $f^{-1}(\mathbf{G}_0) = \{x \in \mathbf{X} \,|\, f(x) \in \mathbf{G}_0\}$ открыто для любого открытого множества $\mathbf{G}_0 \subset \mathbf{X}$, т.е. отображение $f(x)$ непрерывно, тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт.

Замечание: формулировки из номеров **13.2,13.3** иногда берутся за определения непрерывности функции $f(x)$ в точке и на множестве соответственно.

13.4. *(741)* Обязательно ли будет разрывна в данной точке x_0 сумма функций $f(x)+g(x)$, если:

(а) $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(x)$ разрывна в точке x_0;

(б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке x_0.

13.5. *(742)* Обязательно ли произведение функций $f(x) \cdot g(x)$ терпит разрыв непрерывности в данной точке x_0, если:

(а) $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(x)$ разрывна в этой точке;

(б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x = x_0$.

13.6. Постройте примеры:

(а) разрывных в данной точке функций $\varphi(y)$ и $y(x)$, суперпозиция которых непрерывна;

(б) всюду непрерывной и всюду разрывной функций, суперпозиция которых всюду непрерывна;

(в) • двух всюду разрывных функций, суперпозиция которых всюду непрерывна.

13.7. *(745)* Исследуйте на непрерывность сложную функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, если:

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{при } 0 < u < 1, \\ 2-u, & \text{при } 1 < u < 2; \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \\ 2-x, & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad 0 < x < 1.$$

13.8. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна, то и $F(x) = |f(x)|$ также непрерывная функция. Будет ли верно обратное утверждение?

13.9.

(а) • Докажите, что ограниченная монотонная функция может иметь лишь точки разрыва первого рода.

(б) ***(критерий непрерывности монотонной функции)***

Докажите, что монотонная функция непрерывна, тогда и только тогда, когда она принимает все свои промежуточные значения.

(в) ⋆ Можно ли построить монотонную функцию с неизолированными точками разрыва?

13.10. *(748)*

(а) • Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то и функции

$$m(x) \ = \ \inf_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi), \ \ M(x) = \sup_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)$$

также непрерывны на $[a;b]$.

(б) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$. Положим

$$h(x) = \min\{f(x);\, g(x)\}, \qquad k(x) = \max\{f(x);\, g(x)\}.$$

Докажите, что функции $h(x), k(x)$ также непрерывны.

13.11. *(751)* Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$ и $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) < \infty$, то $f(x)$ является ограниченной на этом промежутке.

13.12. *(752, 757)*

(а) • Пусть $f(x)$ - непрерывная и ограниченная функция на $(x_0;+\infty)$. Докажите, что для $\forall T \quad \exists\{x_n\} \to +\infty : \ \lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n+T) - f(x_n)] = 0.$

(б) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a;b)-$ произвольные числа. Докажите, что $\exists\xi^* \in (a;b) : \ f(\xi^*) = \dfrac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}.$

13.13. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$

(а) и для $\forall r \in \mathbb{Q}$ выполнено $f(r) = r^3 + r + 1$. Найдите функцию $f(x)$.

(б) и $\exists C > 0$, такое что для $\forall r \in \mathbb{Q}$ выполнено $|f(r)| \leqslant C$. Докажите, что функция $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$.

13.14.

(а) Докажите, что для любой непрерывной функции $f : [0;1] \mapsto [0;1]$ существует точка $x_0 \in [0;1]$, в которой $f(x_0) = x_0$ *(неподвижная точка отображения f).*

(б) Постройте пример непрерывного отображения $f\ :\ (0;1) \ \mapsto\ (0;1)$, у которого не существует неподвижной точки.

13.15. ⋆ Докажите, что любая функция, определённая на множестве $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, имеет не более, чем счётное множество точек разрыва первого рода.

13.16. $\star$ Существует ли непрерывная действительная функция (отличная от кривой Пеано), определённая на отрезке $[0;1]$, принимающая каждое значение из отрезка $[0;1]$ в континууме точек?

13.17. $\star$ Приведите пример непрерывной на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ функции, которая принимает каждое свое значение три раза. Существует ли непрерывная функция, принимающая каждое свое значение два раза?

13.18. $\star$ Пусть для непрерывной действительнозначной функции $f(x)$ выполняется, что выражение $f(x)-f(y)$ рационально для всех $x,y \in \mathbb{R} : x-y \in \mathbb{Q}$. Докажите, что функция $f(x)$ представляет из себя линейную.

13.19. $\star$ Пусть функция $f(x)$ отображает всякий интервал на интервал. Верно ли, что она непрерывна?

13.20. $\star$ Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *непрерывна по Чезаро в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если

$$\text{при } \lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = x_0 \text{ выполнено } \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} = f(x_0).$$

Опишите все функции, непрерывные по Чезаро хотя бы в одной точке.

13.21. $\star$ Рассмотрим функцию

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & \text{если в троичном разложении числа } x \in (0;1) \text{ содержится } n \text{ единиц } (n = 0,1,\ldots), \\ 0, & \text{если в данном разложении единиц бесконечно много.} \end{cases}$$

Докажите, что любой непустой интервал $\Delta \subset (0;1)$ содержит континуум её точек непрерывности и точек разрыва.

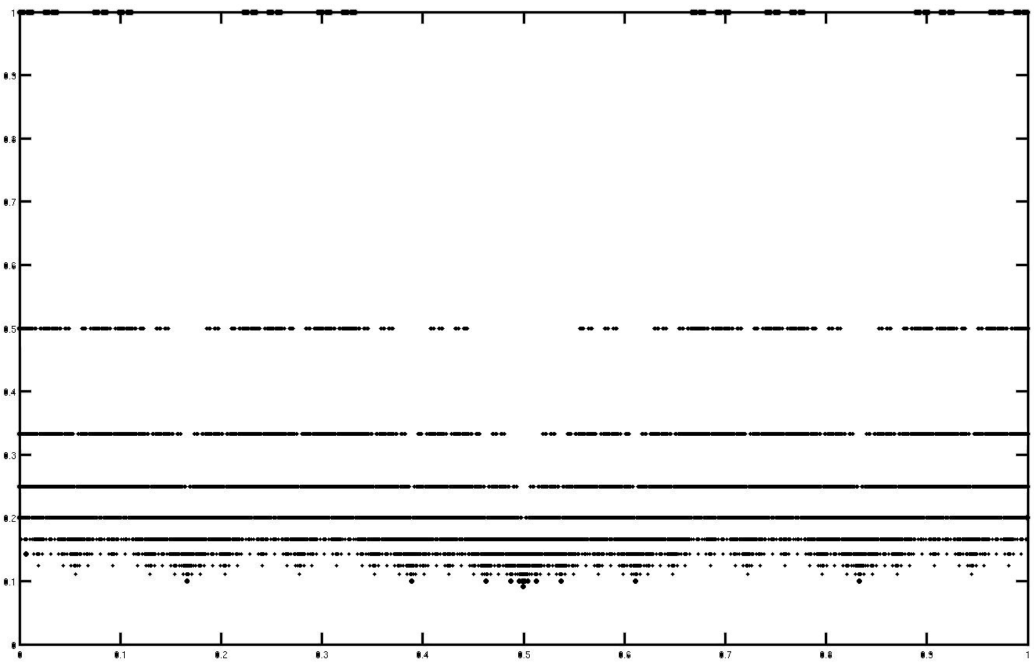


Рисунок функции $\mathcal{T}(x)$ с вычислением 10 знаков троичного разложения.